Extra Hertentamen Functionaalanalyse, 2007–2008

Datum : 05-11-2008, 09.00–12.00 uur.

Het tentamen is open boek; u mag al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw de volgende operator $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$:

   $$Af(x) = xf(x), \quad f \in L^2([0,1])$$

   (a) Toon aan dat A een begrensde lineaire operator is.

   (b) Toon aan dat $\| A \| = 1$.

   (c) Toon aan dat A geen eigenwaarden heeft.

   (d) Toon aan dat A een Hermitische operator is. Leidt op basis hiervan af dat de spectraalradius $r(A)$ van A gelijk is aan 1.

   (e) Toon aan dat het spectrum van A gelijk is aan $[0,1]$.

   (f) Definieer voor $0 \neq d \in \mathbb{R}$ de operator A_d op $L^2([0,1])$ door

   $$A_d f(x) = xf(x) - d, \quad f \in L^2([0,1])$$

   Bepaal de eigenwaarden van A_d.

   Beschouw nu de operator $B : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

   $$Bg = \int_0^1 g(x)dx, \quad g \in L^2([0,1])$$

   (g) Toon aan dat $\| B \| = 1$.

   (h) Beschouw de operator $C : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

   $$Cf = \int_0^1 xf(x)dx, \quad f \in L^2([0,1])$$

   Toon aan dat $C = BA$, en leidt hieruit af dat $\| C \| \leq 1$.

2. Laat X een Banachruimte, en laat $S, T \in \mathcal{B}(X)$ (dus S, T zijn begrensde lineaire operatoren van X naar X). Definieer de operator $L = S + T$.

   (a) Toon aan dat L een lineaire begrensde operator is, en dat $\| L \| \leq \| S \| + \| T \|$.

   (b) Neem aan dat S inverteerbaar is, en dat bovendien $\| S^{-1} \| \| T \| < 1$. Toon aan dat de operator $I + S^{-1}T$, met I de identiteitsafbeelding op X, inverteerbaar is. Toon vervolgens aan dat L inverteerbaar is met inverse $L^{-1} = (I + S^{-1}T)^{-1}S^{-1}$.

   (c) Neem additioneel aan dat S^{-1} een kompakte operator is. Bewijs dat dan ook L^{-1} kompakt is.

3. Beschouw de ruimte $C^1([0,1])$ van continu-differentieerbare reële functies op $[0,2]$. Definieer de lineaire operator $T : C^1([0,2]) \to \mathbb{R}$ door $Tf = \frac{df}{dx}(1)$.

   (a) Laat zien dat T onbegrensd is als we $C^1([0,2])$ zien als deelruimte van $C([0,2])$ met de gebruikelijke supremum norm $\| f \| = \sup_{x\in[0,2]} |f(x)|$.

   (b) Definieer op $C^1([0,2])$ de alternatieve norm

   $$\| f \|_1 = \sup_{x\in[0,2]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,2]} |\frac{df}{dx}(x)|$$

   Laat zien dat $\| \cdot \|_1$ een norm definieert op $C^1([0,2])$.

   (c) Bewijs dat de lineaire operator $T : C^1([0,2]) \to \mathbb{R}$ wel begrensd is in de nieuwe norm $\| \cdot \|_1$. Bepaal de operatornorm van T in dit geval.

Puntenverdeling:

1. a: 5, b: 5, c: 6, d: 6, e: 6, f: 6, g: 2, h: 4.

2. a: 6, b: 11, c: 8.

3. a: 6, b: 9, c: 10.

   Gratis: 10, Totaal: 100